

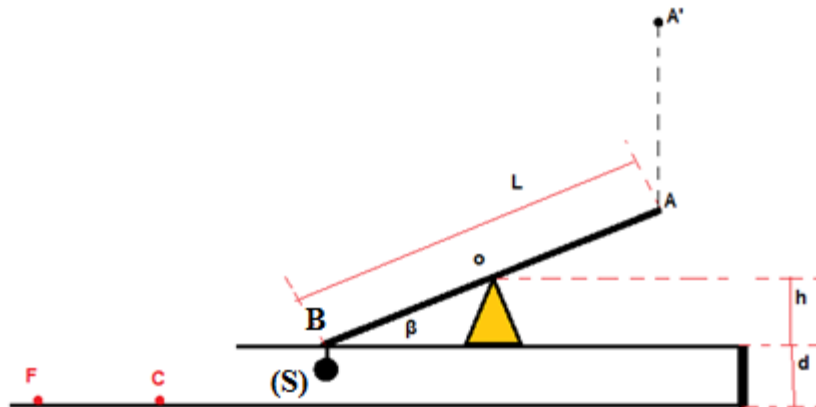
Série de révision n°3

Energie cinétique - mouvement d'un projectile

Exercice n°1 :

Pour tout l'exercice on prendra $\|\vec{g}\|=10 \text{ N.kg}^{-1}$ et on négligera toute force résistive.

Une plaque rectangulaire de longueur L , peut tourner librement autour d'un axe fictif confondu avec la médiatrice de sa longueur et passant par le sommet O d'un support triangulaire de hauteur $h = 0.5 \text{ m}$. Ce support est fixé horizontalement tel qu'il soit éloigné du sol d'une distance d . Au début, la plaque est horizontale. On fixe à l'une des extrémités de la plaque qu'on note B , un solide (S) de masse $M = 1 \text{ kg}$. Alors, la plaque s'incline d'un angle β par rapport à l'horizontale (voir la figure ci-dessous).



On lâche un solide (s) de masse $m = 100 \text{ g}$ sans vitesse à partir d'un point A' situé à une distance d' sur le point A situé à l'extrémité libre de la plaque. Partant en chute libre, (s) atteint le point A permettant de ramener la plaque en une position horizontale, puis la plaque revient à sa position d'équilibre à nouveau et (s) se met à glisser sans frottement le long de la plaque jusqu'à atteindre le point B avec une vitesse V . Une seconde plus tard, (s) touche le sol en un point C avec une vitesse $V' = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- 1) a- Montrer que $d' = h \cdot \left(\frac{M}{m} - 1\right)$ puis calculer cette distance.
b- Calculer V .
- 2) a- Ecrire β en fonction de V, V' et g .
b- En déduire l'expression littérale de L .
c- En déduire β, L et d .

A la suite de l'exercice, on fera quelques essais à l'aide d'un canon cylindrique permettant de lancer des solides. Il présente un ressort lié à une plaque sur laquelle on

met le solide à lancer en un point noté Q. On supposera que pour chaque essai le canon est incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$.

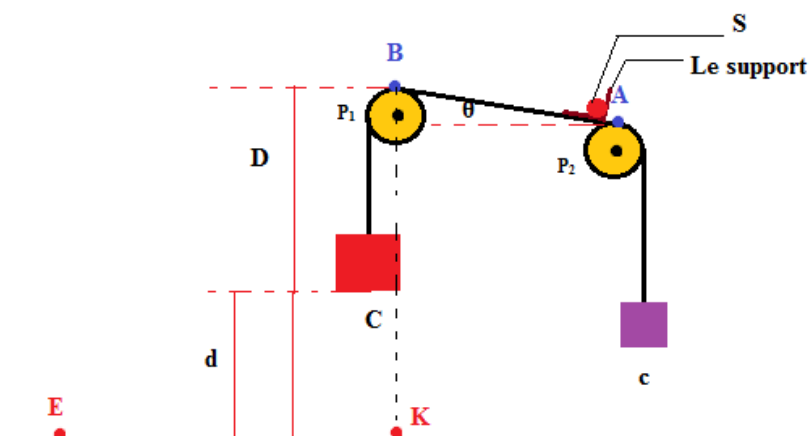
3) a- Comment doit-on placer le canon de sorte que le solide (s) permet de ramener instantanément, la plaque en une position horizontale sachant qu'il permet de lancer (s) avec une vitesse $V_0 = 10.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Repérer la position de Q sachant que (s) arrivera au point A).

b- Maintenant, Q est situé dans un plan vertical passant par un point F du sol (voir la figure ci-dessus) : $FQ = 4.5 \text{ m}$ et $OQ = 12 \text{ m}$. Vérifier que $FQ = h + d$.

c- Calculer alors l'angle que fait la plaque instantanément avec sa position d'équilibre sachant que le canon permet de lancer le solide (s) avec une vitesse $V_0 = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Exercice n°2 :

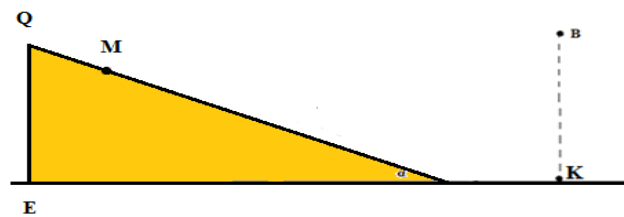
Deux cubes fabriqués en bois, notés (c) et (C), sont reliés par un fil inextensible supposé de masse négligeable. Celui-ci, peut se déplacer sans frottement par les gorges de deux poulies de masses pratiquement nulles. Ce fil est incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale, sur lequel, on a fixé un support pouvant supporter un solide ponctuel (S). Le système (solide + support) est d'une masse m de faible valeur. Les cubes (C) et (c) sont d'arrêtes respectives b_1 et b_2 de sorte que $b_1 = 4 \cdot b_2$. Au repos, (C) est éloigné d'une distance $d = 1 \text{ m}$ par rapport au sol. (Voir la figure ci-dessous).



On laisse le système à lui-même. Partant du point A sans vitesse, (S) quitte le fil au point B avec une vitesse V_B . Au moment même, (C) atteint le sol.

1) Donner l'expression littérale de V_B puis la calculer.

- 2) Le point B est éloigné du sol d'une distance $D = 3m$. Après avoir quitté le point B, (S) atteint le sol en un point E tel que $EK=D$. Calculer alors θ , puis le temps du trajet parcouru par (S) de B vers E.
- 3) On modifie la position de (P_1) de sorte que (P_1) et (P_2) soient dans un même plan horizontal passant par le centre de (P_2) en rapprochant (P_2) de (P_1) de manière que le solide quitte le fil au point B. Calculer la nouvelle vitesse de (S) lorsqu'il quitte le fil (on la notera v').
- 4) Donner à quelle distance et après quel moment (S) atteint-il le sol ((P_1) et (P_2) étant encore horizontales).
- 5) On rend les poulies à leur position initiale, et on fixe un plan triangulaire incliné d'un angle $\alpha = 10^\circ$. Son sommet Q a pour projection sur le sol, le point E, tel que $EQ = D$ (voir la figure ci-dessous)



(S) atteint le plan en un point M. Donner alors la position du point M sur le plan.

- 6) Comment doit-on placer le plan de sorte qu'il ne soit pas touché par (S) ?

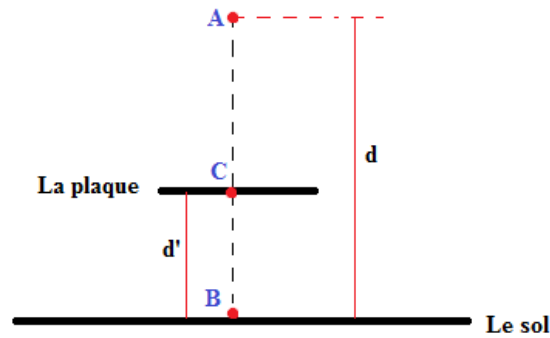
(On distinguera deux cas).

Exercice n°3 :

Un solide (S) de masse $m = 1.5 \text{ kg}$ est lâché sans vitesse d'une distance d du sol. Après avoir heurté le sol, (S) saute vers le haut d'une distance d' .

- 1) a- Montrer que $d = d'$.

b- On lâche (S) de nouveau d'une altitude $d = 2m$. Lorsqu'il atteint le point B (voir la figure ci-dessous), on fixe horizontalement et rapidement à une distance d' du sol, une plaque solide. (S) quitte le point B et heurte la plaque en un point C, puis revient au point B et le mouvement se répète sans cesse (Voir la figure ci-dessous).



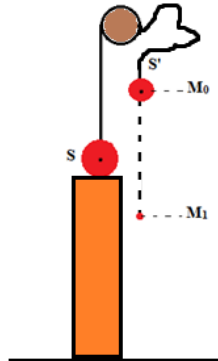
Expliquer l'infinité du mouvement du solide (S).

c- Sachant que le mouvement de C à B, pour un trajet unique dure 0.1 s, calculer d'.

2) Maintenant, on relie (S) par un solide (S') de masse $m' = 500g$, par un fil inextensible de masse négligeable pouvant se déplacer sans frottement par la gorge d'une poulie. Celle-ci est ainsi de masse négligeable.

a- Que se passe-t-il lorsqu'on abandonne le système ? (Justifier par le calcul).

b- On empêche le mouvement du système ((S) + (S')) en fixant (S') en un point M_0 , puis on tire le fil à côté de (S) et on laisse (S) se reposer sur un support. Au fur et à mesure, on lâche (S'). Celui-ci se met à se déplacer. Lorsqu'il atteint le point M_1 , (S) monte vers le haut de 10 cm, puis il rebrousse chemin et se dirige vers le support (voir la figure ci-dessous).



En comparant ce résultat au premier, dire quelle explication justifie le dernier résultat ?

c- Calculer la distance M_0M_1 .

Exercice n°4 :

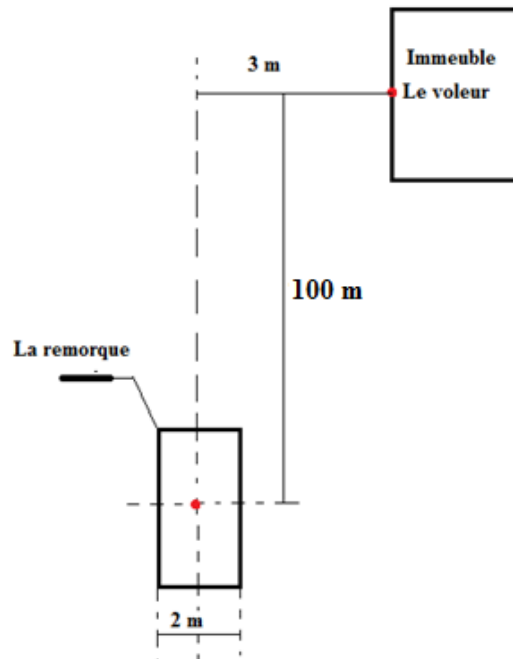
Un solide ponctuel (S) est lancé suivant un angle θ par rapport à l'horizontale avec une vitesse $V = 400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Après une petite durée, il se trouve à une distance $d=2\text{m}$ de son point de départ qu'on note P et à une hauteur $h = 1\text{m}$ par rapport au sol pour occuper un point Q.

1) Etablir les expressions littérales des équations horaires du mouvement de (S).

- 2) En déduire que le mouvement du solide de P à Q est pratiquement rectiligne.
- 3) Déduire de ce qui précède la mesure de θ .
- 4) A quel instant et avec quelle vitesse le solide rebrousse-t-il chemin ?

Exercice n°5 :

Après être éventé, un voleur en train de pirater un immeuble, monte au dernier étage éloigné de 100 m du sol. Bouleversé par les habitants, il saute d'un angle $\alpha = 45^\circ$ par rapport à l'horizontale. Heureusement, un camion dont la remorque de largeur $l = 2 \text{ m}$ est pleine d'éponge, passe à 3 m auprès de l'immeuble. Alors, le voleur tombe exactement au milieu de la remorque ! Celle-ci est éloignée de 1.5 m du sol. Au même temps que le voleur saute, le camion se déplace sur une trajectoire rectiligne avec une vitesse V constante, éloigné de 100 m de la projection du point du saut du voleur, sur le sol (Voir la figure ci-dessous).



Calculer la vitesse V de ce camion.

Corrigés

Exercice n°1 :

1) a – Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A' et A :

On a

$$A' \xrightarrow{\Delta Ec} A = \sum A' \xrightarrow{W} A (\overrightarrow{F_{ext}}) \text{ d'où } \frac{1}{2} m. (V_A^2 - V_{A'}^2) = A' \xrightarrow{W(\overline{P(s)})} A$$

$$\text{Par suite } \frac{1}{2} m (V_A^2 - V_{A'}^2) = m. \|\vec{g}\|. d' \quad \text{Or } V_{A'} = 0, \text{ alors } \boxed{V_A^2 = 2. \|\vec{g}\|. d'}$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et T avec T : un point de la plaque en position horizontale appartenant à (AA') :

$$A \xrightarrow{\Delta Ec} T = \sum A \xrightarrow{W} T (\overrightarrow{F_{ext}}) \text{ d'où } \frac{1}{2} m. (V_T^2 - V_A^2) = A \xrightarrow{W(\overline{P(s)})} T - A \xrightarrow{W(\overline{P(s)})} T$$

$$\text{Par suite } \frac{1}{2} m (V_T^2 - V_A^2) = m. \|\vec{g}\|. h - M. \|\vec{g}\|. h$$

Or au point T la vitesse de (s) s'annule d'où :

$$-\frac{1}{2} m. V_A^2 = m. \|\vec{g}\|. h - M. \|\vec{g}\|. h$$

$$\Rightarrow m. \|\vec{g}\|. d' = \|\vec{g}\|. h. (M - m)$$

$$\Rightarrow d' = \frac{h. (M - m)}{m} \Rightarrow \boxed{d' = h. \left(\frac{M}{m} - 1\right)} \quad \text{A.N : } d' = 0.5 \times \left(\frac{1}{0.1} - 1\right) \Rightarrow d' = 4.5 \text{ m}$$

b- Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B :

$$A \xrightarrow{\Delta Ec} B = \sum A \xrightarrow{W} B (\overrightarrow{F_{ext}}) \rightarrow \frac{1}{2}. m. (V^2 - V_A^2) = 2. m. \|\vec{g}\|. h$$

$$\text{Or } V_A = 0 \Rightarrow \boxed{V^2 = 4. \|\vec{g}\|. h}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = 2. \sqrt{\|\vec{g}\|. h}}$$

$$\text{A.N : } V = 2. \sqrt{10 \times 0.5} \\ = 4.47 \text{ m.s} - 1$$

2) a- Adoptons un repère orthonormé d'origine B, d'axe d'abscisses horizontal et dont le sens positif est celui du mouvement de (s).

$$\text{D'après la R. F. D, on a : } m. \vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \Rightarrow m. \vec{a} = m. \vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Par suite, on a : $\vec{a} = 0.\vec{i} + (-\|\vec{g}\|).\vec{j}$

$$\text{Or } \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \text{ d'où } \vec{V}' = V.\cos\beta.\vec{i} + (-\|\vec{g}\|.t + V.\sin\beta).\vec{j}$$

Par suite, on a : $V'^2 = V^2 + g^2.t^2 - 2.g.V'.t.\sin\beta$

$$\text{Alors : } \sin\beta = \frac{V^2 + g^2.t^2 - V'^2}{2.g.V.t} \text{ Or } t = 1\text{s alors } \boxed{\sin\beta = \frac{V^2 + g^2 - V'^2}{2.g.V}}$$

$$\text{b- On a : } L.\sin\beta = 2.h \quad \Rightarrow L = \frac{2.h}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{2.g.V}{V^2 + g^2 - V'^2}}$$

$$\text{c- On a } \sin\beta = \frac{V^2 + g^2 - V'^2}{2.g.V}$$

$$\text{A.N : } \sin\beta = \frac{4.47^2 + 10^2 - 10^2}{2 \times 10 \times 4.47} = 0.22 \Rightarrow \beta = 13^\circ$$

$$\text{On a } L = \frac{2.g.V}{V^2 + g^2 - V'^2}$$

$$\text{A.N : } L = \frac{2 \times 10 \times 10}{10^2 + 10^2 - 4.47^2} \Rightarrow L = 1.11 \text{ m}$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre B et C :

$$\frac{1}{2}.m.(V^2 - V'^2) = m.\|\vec{g}\|.d \quad \Rightarrow \boxed{d = \frac{(V^2 - V'^2)}{2.\|\vec{g}\|}}$$

$$\text{A.N : } d = \frac{(10^2 - 4.47^2)}{2 \times 10} \Rightarrow d = 4 \text{ m}$$

$$\text{3) D'après la question 1) a - on a } \boxed{V_A^2 = 2.\|\vec{g}\|.d'} \Rightarrow V_A = \sqrt{2.\|\vec{g}\|.d'}$$

$$\Rightarrow V_A = \sqrt{2 \times 10 \times 4.5}$$

$$\Rightarrow V_A = 9.5 \text{ m.s}^{-1}$$

Alors, arrivant au point A avec une vitesse $V_A = 9.5 \text{ m.s}^{-1}$, le solide (s) permet de ramener la plaque en une position horizontale. Considérons un repère orthonormé d'origine Q dont l'axe des abscisses est parallèle à l'horizontale et le sens positif est celui du mouvement de (s).

$$\text{D'après la R.F.D, on a : } m.\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow m.\vec{a} = m.\vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Par suite, on a : $\vec{a} = 0.\vec{i} + (-\|\vec{g}\|).\vec{j}$

$$\text{Or } \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \text{ D'où } \vec{V} = V_0.\cos \alpha.\vec{i} + (-\|\vec{g}\|.t + V_0.\sin \alpha).\vec{j}$$

$$\Rightarrow V^2 = V_0^2 + \|\vec{g}\|^2.t^2 - 2.V_0.\sin \alpha.\|\vec{g}\|.t$$

$$\Rightarrow \|\vec{g}\|^2.t^2 - 2.V_0.\sin \alpha.\|\vec{g}\|.t + V_0^2 - V^2$$

$$\text{D'où : } \Delta' = V_0^2.\sin^2 \alpha.\|\vec{g}\|^2 + \|\vec{g}\|^2.(V^2 - V_0^2) \quad \text{A.N : } \Delta' = 456.25 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 27.5$$

Par suite $t = 0.25 \text{ s}$ ou $t = 0.8 \text{ s}$: La valeur la plus grande est la correcte car elle correspond à une descente alors que la première correspond à une ascension du solide (s).

$$\vec{V} = \frac{d\vec{QA}}{dt} \text{ D'où } \vec{QA} = V_0.\cos \alpha.t.\vec{i} + (-\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin \alpha.t).\vec{j}$$

$$\text{D'où } \vec{QA} \left(\begin{array}{c} V_0.\cos \alpha.t \\ -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin \alpha.t \end{array} \right) \quad \text{A.N : } \boxed{\vec{QA} \left(\begin{array}{c} 7.27 \\ 1 \end{array} \right)}$$

4) **a** – On remarque que $FQ=4.5=4+0.5$ Par suite $\boxed{FQ = h + d}$.

b – Gardons le repère des propriétés précédentes. Soit M le point d'impact entre le solide(s) et la plaque or $\boxed{FQ = h + d}$ alors Q est situé dans un plan parallèle à l'horizontale et passant par O . Par suite, on a :

$$\boxed{x = OM.\cos \beta + OQ} \quad (1) \quad \text{Et} \quad \boxed{y = OM.\sin \beta} \quad (3)$$

D'après les équations horaires précédentes, on a :

$$\boxed{x = V_0.\cos \alpha.t} \quad (2) \quad \text{Et} \quad \boxed{y = -\frac{1}{2}.\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin \alpha.t} \quad (4)$$

1 et 2 donnent : $OM.\cos \beta + OQ = V_0.\cos \alpha.t$

$$\Rightarrow \boxed{OM = \frac{V_0.\cos \alpha.t - OQ}{\cos \beta}} \quad (5)$$

3, 4 et 5 donnent : $-\frac{1}{2}.\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin \alpha.t - (V_0.\cos \alpha.t - OQ).\tan \beta = 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}.\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin \alpha.t - V_0.\cos \alpha.t.\tan \beta + OQ.\tan \beta = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{g}\|.t^2 - 2.V_0.\sin \alpha.t + 2.V_0.\cos \alpha.t.\tan \beta - 2OQ.\tan \beta = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{g}\|.t^2 + 2.V_0.(\cos \alpha.\tan \beta - \sin \alpha).t - 2OQ.\tan \beta = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = [V_0.(\cos \alpha.\tan \beta - \sin \alpha)]^2 + 2OQ.\tan \beta.\|\vec{g}\|$$

$$A.N : \Delta' = 68.37 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 8.26 \Rightarrow t = 1.18 \text{ s}$$

$$\text{Or } \boxed{OM = \frac{V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t - OQ}{\cos \beta}} \text{ d'où : } OM = 0.27 \text{ m}$$

Les forces exercées sur (s) au point M sont le poids de (s) et la force exercée par (S) qu'on note \vec{F} . Par suite : $\|\vec{P}_{(s)}\| \cdot OB = \|\vec{F}\| \cdot OM \Rightarrow \|\vec{F}\| = \frac{\|\vec{P}_{(s)}\| \cdot OB}{OM}$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{F}\| = \frac{\|\vec{P}_{(s)}\| \cdot L}{2 \cdot OM}}$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre le point M et un point N qu'on suppose le point d'annulation de la vitesse de (s).

$$\text{Alors : } M \xrightarrow{\Delta Ec} N = \sum M \xrightarrow{W} N (\overrightarrow{F_{ext}}) \text{ d'où } \frac{1}{2} \cdot m \cdot (V_N^2 - V_M^2) = M \xrightarrow{W(\vec{P}_{(s)})} N - M \xrightarrow{W(\vec{F})} N$$

$$\text{Par suite } \frac{1}{2} \cdot m \cdot (V_N^2 - V_M^2) = m \cdot \|\vec{g}\| \cdot MN - \|\vec{F}\| \cdot MN \text{ Or } V_N = 0$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_M^2 = \frac{\|\vec{P}_{(s)}\| \cdot L}{2 \cdot OM} \cdot MN - m \cdot \|\vec{g}\| \cdot MN$$

$$\Rightarrow \boxed{MN = \frac{m \cdot V_M^2 \cdot OM}{\|\vec{P}_{(s)}\| \cdot L - 2 \cdot m \cdot \|\vec{g}\| \cdot OM}}$$

D'après les équations horaires du mouvement de (s), on a :

$$V^2 = V_0^2 + \|\vec{g}\|^2 \cdot t^2 - 2 \cdot V_0 \cdot \sin \alpha \cdot \|\vec{g}\| \cdot t$$

$$t = 1.18 \text{ s} \quad A.N : V_M = 11.9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Par suite : } MN = 0.36 \text{ m}.$$

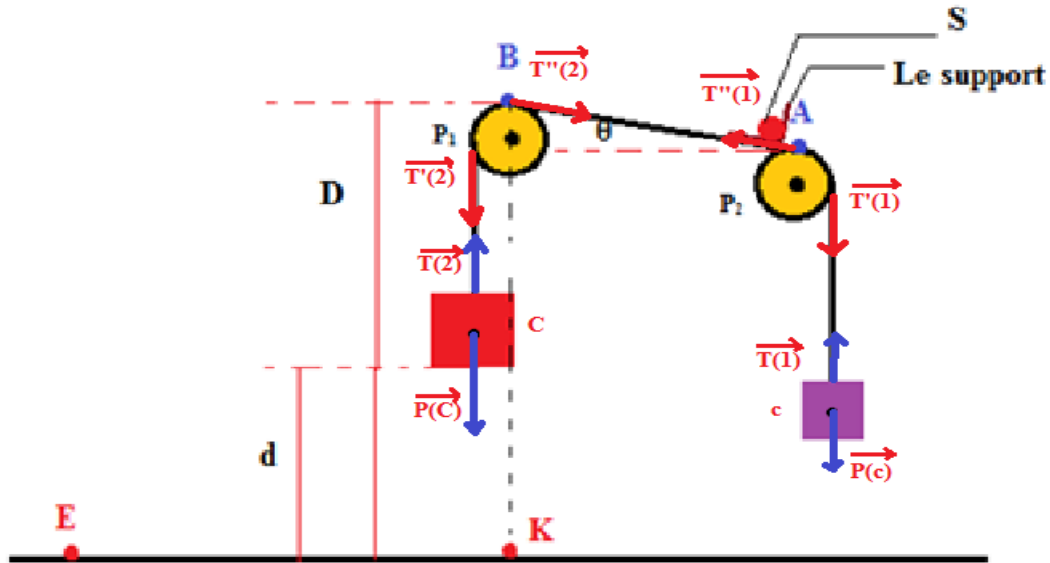
Soit θ l'angle que fait la plaque avec sa position d'équilibre et θ' l'angle que fait la plaque avec l'horizontale en inclinaison maximale (lorsque sa vitesse s'annule au point N).

Après avoir faire une représentation géométrique en respectant les ordres de grandeur, on obtient :

$$\tan \theta' = \frac{MN - OM \cdot \sin \beta}{OM \cdot \cos \beta} \quad A.N : \tan \theta' = 1.13 \Rightarrow \theta' = 48.68^\circ \text{ Or } \theta = \beta + \theta'$$

$$\Rightarrow \theta = 61.68^\circ$$

Exercice n°2 :



1) D'après la R.F.D, on a : $-m \cdot \|\vec{g}\| + \|\vec{T}(1)\| = m \cdot a$ (1)

$$M \cdot \|\vec{g}\| - \|\vec{T}(2)\| = M \cdot a$$
 (2)

$$\begin{cases} \|\vec{T}''(1)\| \cdot \cos \theta \cdot r_{P(2)} - \|\vec{T}(1)\| \cdot r_{P(2)} = J(2) \cdot \ddot{\theta} \\ \|\vec{T}'(2)\| \cdot r_{P(1)} - \|\vec{T}''(2)\| \cdot r_{P(1)} \cdot \cos \theta = J(1) \cdot \ddot{\theta} \end{cases}$$

les poulies sont de masses négligeable alors leurs moments d'inertie sont nuls

Alors : $\|\vec{T}''(1)\| \cdot \cos \theta = \|\vec{T}(1)\|$ et $\|\vec{T}''(2)\| \cdot \cos \theta = \|\vec{T}'(2)\|$ Or :

$\|\vec{T}'(1)\| = \|\vec{T}(1)\|$, $\|\vec{T}(2)\| = \|\vec{T}'(2)\|$ et $\|\vec{T}''(2)\| = \|\vec{T}''(1)\|$ car le fil est de masse négligeable.

Par suite : $\|\vec{T}(1)\| = \|\vec{T}'(2)\| = \|\vec{T}(2)\|$

\Rightarrow D'après (1) et (2), on a : $-m \cdot \|\vec{g}\| + M \cdot \|\vec{g}\| = m \cdot a + M \cdot a$

$\Rightarrow \|\vec{g}\| \cdot (M - m) = a \cdot (M + m)$

$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\|\vec{g}\| \cdot (M - m)}{(M + m)}}$ Or le mouvement du système ((C) + (c)) est rectiligne, d'où :

$V_B^2 - V_A^2 = 2 \cdot a \cdot d \Rightarrow V_B^2 = 2 \cdot a \cdot d + V_A^2$ Or au point A la vitesse est nulle d'où :

$V_B^2 = 2 \cdot a \cdot d = 2 \cdot \frac{\|\vec{g}\| \cdot (M - m)}{(M + m)} \cdot d$ Les cubes sont homogènes (fabriqués en bois), d'où :

$M = V_{\text{volume}(C)} \times \rho_{\text{bois}} = b_1^3 \times \rho_{\text{bois}}$ et $m = V_{\text{volume}(c)} \times \rho_{\text{bois}} = b_2^3 \times \rho_{\text{bois}}$

$$\text{Par suite : } V_B^2 = 2 \cdot \frac{\|\vec{g}\| \cdot (b_1^3 \times \rho_{\text{bois}} - b_2^3 \times \rho_{\text{bois}})}{(b_1^3 \times \rho_{\text{bois}} + b_2^3 \times \rho_{\text{bois}})} \cdot d = 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot \frac{(b_1^3 - b_2^3)}{(b_1^3 + b_2^3)} \cdot d$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite : } V_B &= \sqrt{2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot \frac{(b_1^3 - b_2^3)}{(b_1^3 + b_2^3)}} \Rightarrow V_B = \sqrt{2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot \frac{(64b_2^3 - b_2^3)}{(64b_2^3 + b_2^3)}} \cdot d \\ &\Rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot \frac{64}{65}} \cdot d} \end{aligned}$$

$$\text{A. N: } V_B = 4.43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) On considère un repère orthonormé dont l'origine est B et le sens positif est celui du mouvement du solide.

$$\text{D'après la R.F.D, on a : } m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Rightarrow m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

$$\text{Par suite, on a : } \vec{a} = 0 \cdot \vec{i} + (-\|\vec{g}\|) \cdot \vec{j}$$

$$\text{Or } \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \text{ D'où } \vec{V} = V_B \cdot \cos \theta \cdot \vec{i} + (-\|\vec{g}\| \cdot t + V_B \cdot \sin \theta) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{BM}}{dt} \text{ D'où } \vec{BM} = V_B \cdot \cos \theta \cdot t \cdot \vec{i} + (-\frac{1}{2} \|\vec{g}\| \cdot t^2 + V_B \cdot \sin \theta \cdot t) \cdot \vec{j}$$

$$\text{Par suite: } x = V_B \cdot \cos \theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{V_B \cdot \cos \theta} \text{ et } y = -\frac{1}{2} \|\vec{g}\| \cdot t^2 + V_B \cdot \sin \theta \cdot t$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \|\vec{g}\| \cdot \left(\frac{x}{V_B \cdot \cos \theta}\right)^2 + V_B \cdot \sin \theta \cdot \frac{x}{V_B \cdot \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{-\|\vec{g}\|}{2 \cdot V_B^2 \cdot \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \cdot x}$$

$$\text{Alors : } \frac{-\|\vec{g}\|}{2 \cdot V_B^2 \cdot \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \cdot x - y = 0 \Rightarrow \frac{-\|\vec{g}\|}{2 \cdot V_B^2 \cdot \cos^2 \theta} D^2 + \tan \theta \cdot D + D = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-\|\vec{g}\|}{2 \cdot V_B^2 \cdot \cos^2 \theta} D + \tan \theta + 1 = 0$$

$$\text{Or on a } \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \text{ d'ou : } \frac{-\|\vec{g}\|}{2 \cdot V_B^2} (1 + \tan^2 \theta) \cdot D + \tan \theta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-\|\vec{g}\|}{2 \cdot V_B^2} \tan^2 \theta \cdot D + \tan \theta - \frac{\|\vec{g}\|}{2 \cdot V_B^2} D + 1 = 0$$

$$\text{Posons: } \tan \theta = X \text{ d'ou : } \frac{-\|\vec{g}\|}{2 \cdot V_B^2} D \cdot X^2 + X - \frac{\|\vec{g}\|}{2 \cdot V_B^2} D + 1 = 0$$

$$\Rightarrow X^2 - \frac{2.V_B^2}{\|\vec{g}\|.D}X + 1 - \frac{2.V_B^2}{\|\vec{g}\|.D} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = \left(\frac{V_B^2}{\|\vec{g}\|.D}\right)^2 - 1 + \frac{2.V_B^2}{\|\vec{g}\|.D}$$

A.N: $\Delta' = 0.73 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 0.86 \Rightarrow X = 1.51 \Rightarrow \theta = 56.55^\circ$

$x = V_B \cdot \cos \theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{V_B \cdot \cos \theta}$ A.N : $t = 1.23 \text{ s}$

3) D'après la question (1), on a : $V = \sqrt{2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot \frac{64}{65} \cdot d}$. Or d a changé après cette modification : $d = 1 - 1 \times \sin \theta = 0.16 \text{ m}$ par suite : $V' = 0.71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4) On appliquant la R.F.D, on obtient : $y = -\frac{1}{2} \|\vec{g}\| \cdot t^2 + V_B \cdot \sin \theta \cdot t$, $\sin \theta$ étant nul car les poulies sont horizontales d'ou : $y = -\frac{1}{2} \|\vec{g}\| \cdot t^2$ Et on a :

$$y = -(D - d \cdot \sin \theta) \Rightarrow t^2 = 2 \cdot \frac{(D - d \cdot \sin \theta)}{\|\vec{g}\|} \Rightarrow t = \sqrt{2 \cdot \frac{(D - d \cdot \sin \theta)}{\|\vec{g}\|}}$$

A.N: $t = 0.66 \text{ s}$

On a : $x = V' \cdot \cos \theta \cdot t$ Or $\theta = 0 \Rightarrow x = V' \cdot t \Rightarrow x = 46 \text{ cm}$

5) En ce servant de la deuxième figure, on obtient:

$$x = D - QM \cdot \cos \alpha \quad (1) \quad \text{et} \quad y = D - (EQ - QM \cdot \sin \alpha) \quad (2)$$

Or d'après la question (2), on a :

$$x = V_B \cdot \cos \theta \cdot t \quad (3) \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2} \|\vec{g}\| \cdot t^2 + V_B \cdot \sin \theta \cdot t \quad (4)$$

$$\Rightarrow (1) \text{ et } (3) \text{ donnent : } D - QM \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \theta \cdot t \Rightarrow QM = \frac{D - V_B \cdot \cos \theta \cdot t}{\cos \alpha} \quad (5)$$

$$(2) \text{ et } (4) \text{ donnent : } -\frac{1}{2} \|\vec{g}\| \cdot t^2 + V_B \cdot \sin \theta \cdot t - D + EQ - QM \cdot \sin \alpha = 0 \quad (6)$$

$\Rightarrow (5) \text{ et } (6) \text{ donnent :}$

$$-\frac{1}{2} \|\vec{g}\| \cdot t^2 + V_B \cdot \sin \theta \cdot t - \left(\frac{D - V_B \cdot \cos \theta \cdot t}{\cos \alpha}\right) \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \|\vec{g}\| \cdot t^2 + V_B \cdot \sin \theta \cdot t - D \cdot \tan \alpha + V_B \cdot t \cdot \cos \theta \cdot \tan \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{g}\| \cdot t^2 - 2 \cdot V_B \cdot (\sin \theta + \cos \theta \cdot \tan \alpha) \cdot t + 2 \cdot D \cdot \tan \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = V_B^2 \cdot (\sin \theta + \cos \theta \cdot \tan \alpha)^2 - 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot D \cdot \tan \alpha \quad \text{A.N : } \Delta' = 6.45 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2.54$$

Alors : $t = 0.16 \text{ s}$ ou $t = 0.66 \text{ s}$: On choisit la date la plus grande car le solide en partant de B s'élève à une distance supérieure à D or $EQ = D$ d'ou la rencontre avec le plan à cette date est impossible alors la rencontre est possible à la descente du solide c.a.d à la deuxième date.

Par suite : $t = 0.66 \text{ s}$ Or : $QM = \frac{D - V_B \cdot \cos \theta \cdot t}{\cos \alpha}$ d'où : $QM = 1.41 \text{ m}$

Alors le solide atteint le plan à 1.41 m de son sommet.

6) Pour que le solide ne touche pas le plan, il faut soit faire avancer soit faire reculer ce dernier sur le sol dans le sens du point K. Soient d_1 et d_2 les déplacements possibles du plan.

1^{er} cas si l'on fait avancer le plan vers le point K

$d_1 = QM \cdot \cos \alpha$ A.N : $d_1 = 1.38 \text{ m}$

2^{ème} cas si l'on fait reculer le plan vers le sens inverse

On remarque que $d_1 + d_2 = \frac{QE}{\tan \alpha} \Rightarrow d_2 = \frac{QE}{\tan \alpha} - d_1$ A.N : $d_2 = 15.6 \text{ m}$

Exercice n°3 :

1)a – Soient A, B et C respectivement les points du départ, de l'arrivée au sol et de l'annulation de la vitesse du solide après avoir sauté à partir du sol. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B :

$$A \xrightarrow{\Delta Ec} B = \sum A \xrightarrow{W} B (\overrightarrow{F_{ext}}) \text{ d'où } \frac{1}{2} m \cdot (V_B^2 - V_A^2) = A \xrightarrow{W(\overline{P})} B$$

Par suite $\frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) = m \cdot \|\vec{g}\| \cdot d$ Or $V_A = 0$, alors $V_B^2 = 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot d$ (1)

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points B et C :

$$B \xrightarrow{\Delta Ec} C = \sum B \xrightarrow{W} C (\overrightarrow{F_{ext}}) \text{ d'où } \frac{1}{2} m \cdot (V_C^2 - V_B^2) = B \xrightarrow{W(\overline{P})} C$$

Par suite

$\frac{1}{2} m (V_C^2 - V_B^2) = -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot d'$ (travail résistant) Or $V_C = 0$, alors $V_B^2 = 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot d'$ (2)

(1) et (2) donnent : $d = d'$

b- Puisque toutes les forces dissipatives sont négligeables, l'énergie cinétique se conserve d'où l'infinité du mouvement.

c- Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B :

$$A \xrightarrow{\Delta Ec} B = \sum A \xrightarrow{W} B (\overrightarrow{F_{ext}}) \text{ d'où } \frac{1}{2} m \cdot (V_B^2 - V_A^2) = A \xrightarrow{W(\overline{P})} B$$

Par suite $\frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) = m \cdot \|\vec{g}\| \cdot d$ Or $V_A = 0$, alors $V_B^2 = 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot d$ (1)

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points B et C :

$$B \xrightarrow{\Delta E_c} C = \sum_{B \rightarrow C} \overrightarrow{W}^{(P)} (F_{ext}) \text{ d'où } \frac{1}{2} m \cdot (V_C^2 - V_B^2) = B \xrightarrow{W(P)} C$$

Par suite

$$\frac{1}{2} m (V_C^2 - V_B^2) = -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot d' \text{ (travail résistant)} \Rightarrow V_B^2 - V_C^2 = 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot d' \text{ (2)}$$

$$(1) \text{ et } (2) \text{ donnent : } 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot d - V_C^2 = 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot d' \Rightarrow V_C^2 = 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot (d - d') \text{ (3)}$$

Le mouvement entre C et B est rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\|\vec{g}\|$

(chute libre avec vitesse initiale), alors : $d' = \frac{1}{2} \|\vec{g}\| \cdot t^2 + V_C \cdot t$

$$\Rightarrow V_C = \frac{2 \cdot d' - \|\vec{g}\| \cdot t^2}{2 \cdot t} \Rightarrow V_C^2 = \frac{d'^2}{t^2} + \frac{\|\vec{g}\| \cdot t^2}{4} - \|\vec{g}\| \cdot d' \text{ (4) } \Rightarrow (3) \text{ et } (4) \text{ donnent :}$$

$$\frac{d'^2}{t^2} + \frac{\|\vec{g}\| \cdot t^2}{4} - \|\vec{g}\| \cdot d' = 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot (d - d') \Rightarrow \frac{1}{t^2} d'^2 + \|\vec{g}\| \cdot d' + \frac{\|\vec{g}\| \cdot t^2}{4} - 2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot d$$

$$\text{Posons } d' = X \Rightarrow \Delta = \|\vec{g}\|^2 - \|\vec{g}\| + \frac{8 \cdot \|\vec{g}\| \cdot d}{t^2} \text{ A.N : } \Delta = 16090 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 126.84$$

$X = -0.68$ (à rejeter car $X = d' > 0$) ou $X = 0.584$ Par suite $d' \cong 0.6 \text{ m} \cong 60 \text{ cm}$

2)a – Choisissons un sens positif arbitraire. D'après la R.F.D, on a :

$m' \cdot a = m' \|\vec{g}\| - \|\vec{T}'\|$ et $m \cdot a = -m \cdot \|\vec{g}\| + \|\vec{T}'\|$ Or la poulie et le fil sont de masses négligeables alors : $\|\vec{T}'\| = \|\vec{T}\|$ par suite : $m' \|\vec{g}\| - m' \cdot a = m \cdot \|\vec{g}\| + m \cdot a$

$$\Rightarrow a \cdot (m + m') = \|\vec{g}\| \cdot (m' - m) \Rightarrow a = \frac{\|\vec{g}\| \cdot (m' - m)}{(m + m')} \Rightarrow \text{A.N : } a = -5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

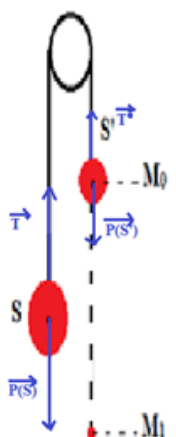
$a < 0$ d'où le sens positif du mouvement est celui de (S). Alors le système se déplace vers le sens de (S).

b – Dans le premier cas, le mouvement s'est effectué dans le sens de (S), mais

dans le 2^{ème} cas, on fait acquérir (S') une énergie supplémentaire qui lui permet de déplacer

(S) pourtant $m > m'$. Lorsque cette énergie s'annule, le mouvement s'effectue

dans le sens initial.



c – Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points M_0 et M_1 :

$$M_0 \xrightarrow{\Delta Ec} M_1 = \sum M_0 \xrightarrow{w} M_1 (\overrightarrow{F_{ext}}) \text{ d'où } \frac{1}{2} m'. (V_{M_1}^2 - V_{M_0}^2) = M_0 \xrightarrow{w(\overline{P'})} M_1$$

$$\text{Or } V_{M_0} = 0 \text{ D'où } \frac{1}{2} m'. V_{M_1}^2 = m'. \|\vec{g}\|. M_0 M_1 \Rightarrow \boxed{V_{M_1}^2 = 2. \|\vec{g}\|. M_0 M_1} \quad (1)$$

Soit M_2 le point d'annulation de la vitesse de (S') . Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points M_1 et M_2 :

$$M_1 \xrightarrow{\Delta Ec} M_2 = \sum M_1 \xrightarrow{w} M_2 (\overrightarrow{F_{ext}}) \text{ d'où } \frac{1}{2} m'. (V_{M_2}^2 - V_{M_1}^2) = M_1 \xrightarrow{w(\overline{P'})} M_2 - M_1 \xrightarrow{w(\overline{P'})} M_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m'. V_{M_1}^2 = m. \|\vec{g}\|. M_1 M_2 - m'. \|\vec{g}\|. M_1 M_2 \Rightarrow \boxed{V_{M_1}^2 = \frac{2. \|\vec{g}\|. M_1 M_2. (m - m')}{m'}} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \text{ donnent : } \boxed{M_0 M_1 = \frac{M_1 M_2. (m - m')}{m'}} \quad \text{A.N : } M_0 M_1 = 20 \text{ cm}$$

Exercice n°4 :

$$1) \text{ D'après la R.F.D, on a : } m. \vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \Rightarrow m. \vec{a} = m. \vec{g} \\ \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

$$\text{Par suite, on a : } \vec{a} = o. \vec{i} + (-\|\vec{g}\|). \vec{j}$$

$$\text{Or } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ d'où } \vec{v} = V_0. \cos \theta. \vec{i} + (-\|\vec{g}\|. t + V_0. \sin \theta). \vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} \text{ D'où } \overline{OM} = V_0. \cos \theta. t. \vec{i} + (-\frac{1}{2} \|\vec{g}\|. t^2 + V_0. \sin \theta. t). \vec{j}$$

$$2) \text{ D'après ce qui précède, on a : } \boxed{x = V_0. \cos \theta. t} \text{ Et } \boxed{y = -\frac{1}{2} \|\vec{g}\|. t^2 + V_0. \sin \theta. t}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \|\vec{g}\| \frac{x^2}{V_B^2. \cos^2 \theta} + \tan \theta. x \text{ Or } x \ll V_B \text{ alors } \boxed{y \cong \tan \theta. x}$$

\Rightarrow L'équation de la trajectoire est celle d'une droite, d'où le mouvement du solide entre les points P et Q est rectiligne.

$$3) \text{ D'après ce qui précède, on a : } \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{A.N : } \tan \theta = 0.5 \Rightarrow \theta = 26.56^\circ$$

$$4) \text{ On a } \vec{v} = V_0. \cos \theta. \vec{i} + (-\|\vec{g}\|. t + V_0. \sin \theta). \vec{j} \text{ Or le solide rebrousse chemin}$$

lorsque la vitesse est minimale D'ou - $\|\vec{g}\|.t + V_0.\sin\theta = 0 \Rightarrow t = \frac{V_0.\sin\theta}{\|\vec{g}\|}$

A.N : $t = 17.88 \text{ s}$

On a : $x = V_0.\cos\theta.t$ Or $t = 17.88 \text{ s} \Rightarrow x = 6397.22 \text{ m}$

Exercice n°5:

Soit m la masse du voleur. Adoptons un repère orthonormé dont l'origine est le point de saut du voleur, le sens positif est celui du mouvement et l'axe des abscisses est parallèle à l'horizontale.

D'après la R.F.D, on a : $m.\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow m.\vec{a} = m.\vec{g}$
 $\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Par suite, on a : $\vec{a} = 0.\vec{i} + (-\|\vec{g}\|).\vec{j}$

Or $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ d'où $\vec{V} = V_0.\cos\theta.\vec{i} + (-\|\vec{g}\|.t + V_0.\sin\theta).\vec{j}$

$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ D'où $\vec{OM} = V_0.\cos\theta.t.\vec{i} + (-\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\theta.t).\vec{j}$

Alors : $x = V_0.\cos\theta.t \Rightarrow \frac{x}{V_0.\cos\theta}$ Or $y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\theta.t$

Alors : $y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|\frac{x^2}{V_0^2.\cos^2\theta} + \tan\theta.x \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{\|\vec{g}\|.x^2}{2.(\tan\theta - y).\cos^2\theta}}$

Or le point de coordonnées (3, -98.5) appartient à la trajectoire.

Rq: $-98.5 = -(100 - 1.5) \Rightarrow A.N : V_0 = 0.95 \text{ m.s}^{-1}$. $y = -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\theta.t$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\|\vec{g}\|.t^2 + V_0.\sin\theta.t - y = 0 \Rightarrow \Delta = (V_0.\sin\theta)^2 - 2.\|\vec{g}\|.y$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(V_0.\sin\theta)^2 - 2.\|\vec{g}\|.y}$ A.N : $\sqrt{\Delta} = 44.4 \Rightarrow t = 4.5 \text{ s}$

Conclusion : le trajet du voleur vers la remorque a duré 4.5 s.

Or le mouvement du camion est rectiligne uniforme D'ou : $V = \frac{x}{t}$

A.N : $V = 22.22 \text{ m.s}^{-1} = 80 \text{ km.h}^{-1}$

